２次方程式

講師
渡部 儀隆

２次方程式を複素数の範囲で解きます。また，２次方程式の解の種類について調べます。「複素数の範囲であれば，すべての２次方程式が解ける」ということを学習します。

学習のポイント
① ２次方程式の解の種類
② 判別式と解の種類
③ ２次方程式の解の判別

1 ２次方程式の解の種類

●解の公式

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例　次の２次方程式を，解の公式を用いて解きなさい。

(1) $x^2-3x+1=0$

(2) $9x^2-6x+1=0$

(3) $4x^2+3x+2=0$

解答

(1) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　実数解

(2) $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times9\times1}}{2\times9}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\dfrac{6\pm\sqrt{0}}{18}=\dfrac{1}{3}$　重解

※この問題は，$(3x-1)^2=0$ として解くこともできます。

(3) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times4\times2}}{2\times4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-32}}{8}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-23}}{8}=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}\,i}{8}$

虚数解

問１　２次方程式を，解の公式を用いて解きなさい。

(1) $2x^2-3x-1=0$

(2) $9x^2+12x+4=0$

(3) $3x^2+3x+2=0$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

2 判別式と解の種類

●判別式と解の種類

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ と解について，

$D > 0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D = 0 \iff$ 重解をもつ（重解も実数解です）

$D < 0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

D は，discriminant の頭文字！

2次方程式の解の公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ で，根号（ルート）の中の式 $b^2 - 4ac$ が判別式。

例　次の2次方程式の解を判別してみましょう。

$2x^2 + 5x - 4 = 0$

解答

$D = b^2 - 4ac$

$= 5^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 25 + 32 = 57 > 0$

$D > 0$ であるから，**異なる2つの実数解**をもつ。

問2　次の2次方程式の解を判別しなさい。

(1)　$x^2 - 6x - 3 = 0$

(2)　$2x^2 - 5x + 7 = 0$

(3)　$4x^2 - 12x + 9 = 0$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

3 2次方程式の解の判別

● 2次方程式の解を判別する問題

例　2次方程式 $3x^2 - 6x + k = 0$ が異なる2つの実数解をもつような定数の k の値の範囲を求めなさい。

解答

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times k = 36 - 12k$

異なる2つの実数解をもつのは $D > 0$ のときであるから，

$36 - 12k > 0$

これを解いて，

$k < 3$

問3　2次方程式 $5x^2 - 10x - k = 0$ が重解をもつような定数 k の値を求めなさい。

問1・解答

(1) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$　(2) $x = -\dfrac{2}{3}$　(3) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{15}\,i}{6}$

問2・解答

(1) 異なる2つの実数解をもつ　(2) 異なる2つの虚数解をもつ　(3) 重解をもつ

問3・解答

$k = -5$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。