

組み合わせ

講師

湯浅 弘一



身近にあることは？

カード



これを1列に並べて3桁の数をつくるとすると、

1 2 3

1 3 2

2 1 3



2 3 1

3 1 2

3 2 1

の6通り。階乗の記号を使って計算で求めると $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り) です。

さて、ここでカードを  に変更します。

これを1列に並べて3桁の数をつくると、上の  が  に変わったので、先ほどの6通りは

1 2 3 ⇨ 1 2 2

1 3 2 ⇨ 1 2 2

2 1 3 ⇨ 2 1 2

2 3 1 ⇨ 2 2 1

3 1 2 ⇨ 2 1 2

3 2 1 ⇨ 2 2 1

同じものがでてくるので、まとめると

1 2 2

2 1 2

2 2 1

の3通りです。

これを計算で求めることを考えましょう。

例えば、 $\boxed{3}$ が $\boxed{2}$ に変わると

$$23 \rightarrow 22$$

$$32 \rightarrow 22$$

となり、どちらも22になります。

つまり、23と32の順列 $2! = 2$ 通り \rightarrow 1通りになるということです。

半分になるということですから、先ほどの問題は

$$3! \times \frac{1}{2!} = 3 \text{ (通り)}$$

と求められます。



確認しましょう(1)

A、B、C、Dの4人の中から2人を選ぶ仕方の場合の数は何通りでしょうか？

すべて列挙してもよいですが、ここは組合せの公式を使いましょう。

$$n \text{ 個の物から } r \text{ 個を選ぶ仕方は } {}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ です。}$$

これを使うと

$${}_4 C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \text{ (通り)} \text{ です。 (これが組合せの公式です!)}$$

実際に書きだしてみてもわかります。

AB, AC, AD, BC, BD, CDの6通りです。

問題 1

A B C D E Fの6人の中から3人組を1組だけ選ぶ仕方は？

【考え方】

公式を使ってみましょう

$${}_6 C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ (通り)}$$

となります。

問題2



からなる鉄道があります。

例えば，C 駅→F 駅のような片道きっぷは何通りできるでしょうか？

また，例えば，C 駅⇄F 駅のような往復きっぷは何通りできるでしょうか？

【考え方】

片道きっぷは「出発駅→到着駅」です。

出発駅には A～G の通り，到着駅には出発駅以外の 6 通りが入りますから

$7 \times 6 = 42$ (通り) です。

また，往復きっぷは出発駅と到着駅を入れ替えても変わりません。

つまり，「C 駅⇄F 駅」と「F 駅⇄C 駅」のきっぷは同じきっぷになりますから

片道きっぷの 42 通りの半分，つまり $42 \div 2 = 21$ (通り) になります。

△ 確認しましょう (2)

A B B B の 4 文字をすべて使って一列に並べる仕方の数を求めることを考えます。

まず，A B C D の 4 文字の順列の数は

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ (通り)}$$

です。しかし，C ⇄ B, D ⇄ B になるので，B, C, D の順列は

B C D ⇄ B B B

B D C ⇄ B B B

C B D ⇄ B B B

C D B ⇄ B B B

D B C ⇄ B B B

D C B ⇄ B B B

6 通りが 1 通りになります。

つまり全体の $\frac{1}{6}$ になるので，A B C D としたときの 24 通りの 6 分の 1 ですから，

$$24 \times \frac{1}{6} = 4 \text{ (通り)}$$

となります。

《参考》

実際に A B B B の順列を書きあげてみると…

A B B B

B A B B

B B A B

B B B A

の4通りです。

これを同じ文字を含む順列であることから**重複順列**といいます。

問題3

A A B B B の5文字をすべて使って一列に並べる仕方の数を求めなさい。

【考え方】

A B C D E の5文字の順列の場合の数ならば

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ (通り)}$$

です。

ここで C ⇨ A, D ⇨ B, E ⇨ B と考えると, AC と CA が共に AA になります。

つまり 2通り ⇨ 1通り

ですから

BDE を並び替えたものは, すべて B B B の1通りになります。

つまり B D E の順列 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り) はすべて B B B の1通りに変わるということ

です。

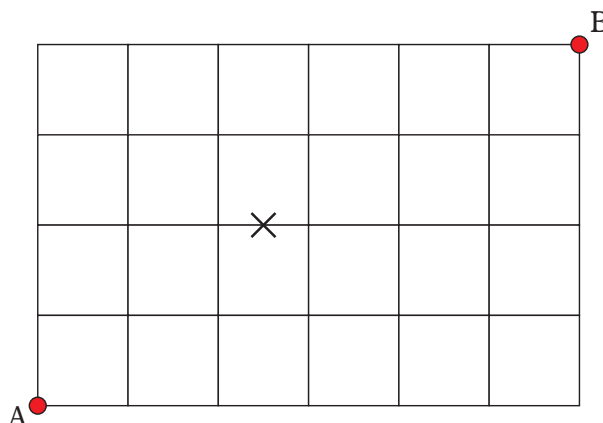
したがって, 6通り ⇨ 1通り

まとめると

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10 \text{ (通り)}$$

問題4

右の図のような格子状の道筋を
AからBまで行くとき、
最短経路は何通りありますか？
また、図の×印が通れないと
すると、AからBまで行くとき、
最短経路は何通りありますか？



【考え方】

→ (1区間右に行くこと) をR, ↑ (1区間上に行くこと) をUと表すことにします。

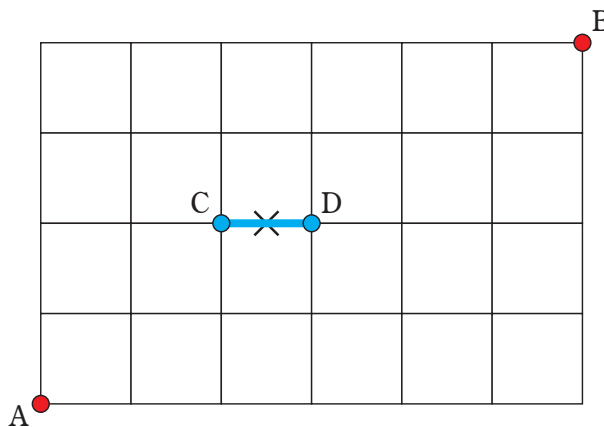
AからBまでは、→が6個と↑が4個あります。

すると、RRRRRRUUUUの順列だけあるので、

$$\frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210 \text{ (通り)}$$

次に右の図のようにCとDを定めると、
CD間が通れません。

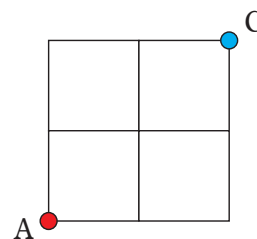
そこで、CD間を通る場合の数を求めて
全体の場合の数210通りから引けば
CD間を通らない場合の数を求めること
ができます。



まず、右の図からA→Cへの行き方は

→が2回↑が2回、つまりRRUUの順列を考えます。

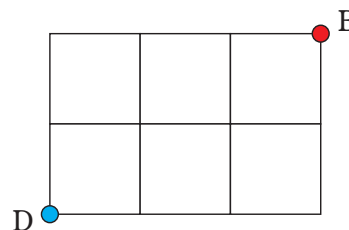
$$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6 \text{ (通り)}$$



次に、下の図からD→Bへの行き方は

→が3回↑が2回、つまりRRRUUUの順列を考えます。

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \text{ (通り)}$$



したがって、A→C→D→Bの行き方は $6 \times 1 \times 10 = 60$ (通り)

ですから、CD間を通らない行き方は

$$210 - 60 = 150 \text{ (通り)}$$

となります。