定積分 (2)
～ 定積分の計算 ～

講師
川﨑 宣昭

定積分の計算方法について学習します。今回は特に関数の実数倍，関数の和や差の定積分の計算方法を学びます。

学習のポイント
① 関数の実数倍の定積分
② 関数の和や差の定積分
③ 公式を利用した定積分の計算

1 関数の実数倍の定積分

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\times\frac{x^2}{2} + C = \boxed{x^2} + C$$

$$\int x\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2}} + C$$

定積分で使う式 $F(x)$

$2x$ の不定積分は，x の不定積分の２倍です。

$$\int_1^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{15}{2},\quad \int_1^4 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^4 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$$

この計算から，定積分の値も $\int_1^4 2x\,dx = 2\int_1^4 x\,dx$ となっています。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \left[kF(x)\right]_a^b = \{kF(b) - kF(a)\} = k\{F(b) - F(a)\} = k\int_a^b f(x)\,dx$$

のように証明できます。

関数の実数倍の定積分の公式

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k \text{ は定数})$$

2 関数の和や差の定積分

関数 $f(x)$, $g(x)$ の不定積分を $F(x)$, $G(x)$ とするとき,

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b$$

$$= \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ も同様に証明できます。

関数の和や差の定積分の公式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

例　$\int_1^3 (3x^2-4x+2)\,dx$

$= 3\int_1^3 x^2dx - 4\int_1^3 x\,dx + 2\int_1^3 dx$

$= 3\Big[\dfrac{x^3}{3}\Big]_1^3 - 4\Big[\dfrac{x^2}{2}\Big]_1^3 + 2\Big[x\Big]_1^3$

$= \Big[x^3\Big]_1^3 - 2\Big[x^2\Big]_1^3 + 2\Big[x\Big]_1^3$

$= (3^3-1^3) - 2(3^2-1^2) + 2(3-1)$

$= 26-16+4$

$= 14$　(答)

定積分を各項に分け,
定数はインテグラルの左側に！
$\Big[x^3-2x^2+2x\Big]_1^3$
としてもよいが,
符号の計算ミスをしないように注意！

3 公式を利用した定積分の計算

① 定積分を各項に分ける
② 定数はインテグラルの左側に出す
③ x^2，x，1 の不定積分を求める
④ 分数がなるべく少なくなるようにする
⑤ 上端の値を代入した値から，下端の値を代入した値を引く

例

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x-1)(x+3)\,dx &= \int_1^2 (x^2+2x-3)\,dx \\ &= \int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 x\,dx - 3\int_1^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 3\left[x\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 + \left[x^2\right]_1^2 - 3\left[x\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}(2^3-1^3) + (2^2-1^2) - 3(2-1) \\ &= \frac{1}{3}\times 7 + 3 - 3 \\ &= \frac{7}{3} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

問1　次の定積分を求めなさい。
(1) $\int_0^4 (3x^2-6x)\,dx$　　(2) $\int_0^2 (-x^2+2x+4)\,dx$

問2　次の定積分を求めなさい。
(1) $\int_1^3 (x+1)(x-3)\,dx$　　(2) $\int_{-1}^2 (x+3)^2\,dx$

問 1・解答

(1) $\displaystyle\int_0^4 (3x^2-6x)\,dx$

$= 3\displaystyle\int_0^4 x^2dx - 6\int_0^4 x\,dx$

$= 3\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^4 - 6\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^4$

$= \left[x^3\right]_0^4 - 3\left[x^2\right]_0^4$

$= (4^3-0^3) - 3(4^2-0^2)$

$= 64-48$

$= 16$

(2) $\displaystyle\int_0^2 (-x^2+2x+4)\,dx$

$= -\displaystyle\int_0^2 x^2dx + 2\int_0^2 x\,dx + 4\int_0^2 dx$

$= -\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 + 2\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 + 4\left[x\right]_0^2$

$= -\dfrac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 + \left[x^2\right]_0^2 + 4\left[x\right]_0^2$

$= -\dfrac{1}{3}(2^3-0^3) + (2^2-0^2) + 4(2-0)$

$= -\dfrac{8}{3} + 4 + 8$

$= \dfrac{28}{3}$

問 2・解答

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x+1)(x-3)\,dx$

$= \displaystyle\int_1^3 (x^2-2x-3)\,dx$

$= \displaystyle\int_1^3 x^2dx - 2\int_1^3 x\,dx - 3\int_1^3 dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^3 - 2\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^3 - 3\left[x\right]_1^3$

$= \dfrac{1}{3}\left[x^3\right]_1^3 - \left[x^2\right]_1^3 - 3\left[x\right]_1^3$

$= \dfrac{1}{3}(3^3-1^3) - (3^2-1^2) - 3(3-1)$

$= \dfrac{1}{3}\times 26 - 8 - 6$

$= -\dfrac{16}{3}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+3)^2\,dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^2 (x^2+6x+9)\,dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^2 x^2dx + 6\int_{-1}^2 x\,dx + 9\int_{-1}^2 dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 + 6\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 + 9\left[x\right]_{-1}^2$

$= \dfrac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^2 + 3\left[x^2\right]_{-1}^2 + 9\left[x\right]_{-1}^2$

$= \dfrac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\} + 3\{2^2-(-1)^2\} + 9\{2-(-1)\}$

$= \dfrac{1}{3}(8+1) + 3(4-1) + 9(2+1)$

$= 3 + 9 + 27$

$= 39$