第76回　第5章　微分と積分「導関数の応用」

関数の極大・極小(2)
～ 関数の極値 ～

講師
渡部 儀隆

２次関数や３次関数の極値を求めよう。

学習のポイント
① 極値の求め方
② ２次関数の極値
③ ３次関数の極値

1 極値の求め方

増減表をつくるのが近道です！

増減表のつくり方

まず，関数を微分して導関数 $f'(x)$ を求めます。
次に，$f'(x)=0$ を解き，導関数が０となる x の値を求めます。
そして，$f'(x)=0$ となる x の値の前後で $f'(x)$ の符号を調べ，増減表を完成させましょう。
$f'(x)$ がプラスからマイナスに変わるところで極大となり，そのときの $f(x)$ の値が極大値です。
また，$f'(x)$ がマイナスからプラスに変わるところで極小となり，そのときの $f(x)$ の値が極小値です。

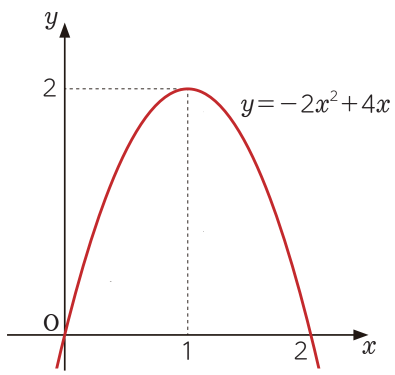
2 ２次関数の極値

例　関数 $f(x)=-2x^2+4x$ の極値を求めてみよう。

解答　$f'(x)=-4x+4=-4(x-1)$
$f'(x)=0$ の解は $x=1$
$f'(x)$の増減表は，次のようになります。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 2	↘

$f'(2)=-4\times1=-4$ より「－」
$f(1)=-2\times1^2+4\times1=-2+4=2$
$f'(0)=-4\times(-1)=4$ より「＋」



よって，この関数は $x=1$ のとき極大になり，極大値は２

3 ３次関数の極値

例　関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ の極値を求めてみよう。

解答　$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0$ の解は $x = 0,\ 2$

$f(x)$ の増減表は，次のようになります。

$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 2 = 2$　　$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

$f'(-1) = 3 \times (-1) \times (-1-2)$
$= -3 \times (-3)$
$= 9$　より「＋」

$f'(3) = 3 \times 3 \times (3-2)$
$= 3 \times 3 \times 1$
$= 9$　より「＋」

$f'(1) = 3 \times 1 \times (1-2) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$　より「－」

よって，この関数は

$x = 0$ のとき極大になり，極大値は 2

$x = 2$ のとき極小になり，極小値は -2

さて，極値をもたない例について考えてみましょう。

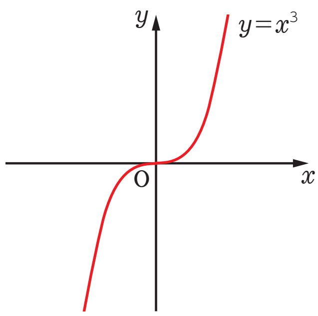
関数 $f(x) = x^3$ の導関数を求めると，

$f'(x) = 3x^2$ となるので，

$f'(x) = 0$ の解は $x = 0$

$f(x)$ の増減表は次のようになります。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗



$f'(x) = 0$ となる x の値の前後で導関数の符号が変わらないので，極値をもちません。