第68回　第5章　微分と積分「微分係数と導関数」

導関数(1)
～ 導関数の定義 ～

講師
水谷 信也

微分係数を簡単に求める方法を学びましょう。

学習のポイント
① $x=a$ における微分係数 $f'(a)$
② 導関数の定義
③ 微分することの意味

1 $x=a$ における微分係数 $f'(a)$

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，
$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=h(2a+h)$
であるから，

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2a+h) \\
&= 2a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a+h)^2-a^2 \\
&= a^2+2ah+h^2-a^2 \\
&= 2ah+h^2 \\
&= h(2a+h)
\end{aligned}
$$

この式を用いれば，いろいろな a の値について $f'(a)$ の値を求めることができます。

2 導関数の定義

例　関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数 $f'(3)$ は，
$f'(a)=2a$ の式に $a=3$ を代入すると
$f'(3)=2\times 3=6$

$f(x)=x^2$ について，$f'(a)=2a$ の式を用いて a の値における微分係数を求めると，下の表のようになります。

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

すなわち，a の値に対して $f'(a)$ の値が定まり，$f'(a)$ は a の関数になります。
このとき，
文字 a を x で置き換えて得られる関数 $f'(x)=2x$ を関数 $f(x)=x^2$ の導関数（どうかんすう）といいます。
一般に，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められます。

導関数　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3 微分することの意味

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を微分(びぶん)するといいます。

例　関数 $f(x)=x$ を微分してみましょう。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

例　関数 $f(x)=x^3$ を微分してみましょう。

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3$$
$$=h(3x^2+3xh+h^2)$$

$$(x+h)^3-x^3$$
$$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$$
$$=3x^2h+3xh^2+h^3$$
$$=h(3x^2+3xh+h^2)$$

よって

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$
$$=3x^2$$