第 52 回　第 4 章　指数関数と対数関数「指数関数」

指数の拡張 (2)
～ 指数が整数のときの指数法則 ～

講師
川﨑 宜昭

指数の範囲を 0 や負の整数に広げたときに，どのような指数法則が成立するのかを調べ，その指数法則を用いた計算方法を学びます。

学習のポイント

① 0や負の整数の指数を用いないで表すには？
② 指数が整数のときの指数法則
③ 指数法則を用いた計算

1 0や負の整数の指数を用いないで表すには？

0 や負の整数の指数

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき，$a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

前回の学習で，$2^0 = 1$，$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ であることを確認しましたが，他の例も紹介しましょう。

例　$3^0 = 1$ ← $a^0 = 1\ (a \neq 0)$

$2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$ ← $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$（n が正の整数）

例　$\dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{2^6} = 2^{-6}$

$\dfrac{1}{243} = \dfrac{1}{3^5} = 3^{-5}$

2 指数が整数のときの指数法則

学習のポイント 1 のように，0 や負の整数の指数の計算方法を定めると，次のような計算ができます。

（1）$a^5 \times a^{-2} = a^5 \times \dfrac{1}{a^2} = a^3$ ➡ $a^{5+(-2)}$ に等しい　$a^5 \times a^{-2} = a^{5+(-2)}$

（2）$a^5 \div a^{-2} = a^5 \div \dfrac{1}{a^2} = a^5 \times a^2 = a^7$ ➡ $a^{5-(-2)}$ に等しい　$a^5 \div a^{-2} = a^{5-(-2)}$

（3）$(a^5)^{-2} = \dfrac{1}{(a^5)^2} = \dfrac{1}{a^{10}} = a^{-10}$ ➡ $a^{5\times(-2)}$ に等しい　$(a^5)^{-2} = a^{5\times(-2)}$

計算問題ならば，ここまででよい

（4）$(ab)^{-2} = \dfrac{1}{(ab)^2} = \dfrac{1}{a^2b^2} = \dfrac{1}{a^2} \times \dfrac{1}{b^2}$ ➡ $a^{-2}b^{-2}$ に等しい　$(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$

計算問題ならば，ここまででよい

（1）～（4）と同じような例を考えれば，次のような指数法則が成立します。

一般に，m，n がどのような整数であっても，次の指数法則が成り立ちます。

$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m\times n}$　　$(ab)^n = a^nb^n$

3 指数法則を用いた計算

（1）$10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3 = 1000$

（2）$2^{-3} \div 2^{-7} = 2^{-3-(-7)} = 2^4 = 16$

（3）$(3^{-3})^2 = 3^{-3\times2} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{1}{729}$

確かめてみよう！

$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$

$2^3 \times 2^{-3} = 2^3 \times \dfrac{1}{2^3} = 1$

➡

$a^0 = 1$，　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

としたことによって，

うまくいっていますね！

問 1 次の□にあてはまる数を入れなさい。

（1）$4^{\square} = 1$　　（2）$5^{-3} = \dfrac{1}{5^{\square}}$　　（3）$a^{\square} = \dfrac{1}{a^7}$

問 2 次の計算をしなさい。

（1）$2^{-2} \times 2^{-3}$　　（2）$3^{-3} \div 3^{-2}$　　（3）$(2^{-2})^3$

問 1・解答

(1) 0　(2) 3　(2) −7

問 2・解答

(1) $2^{-2} \times 2^{-3} = 2^{(-2)+(-3)} = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$

(2) $3^{-3} \div 3^{-2} = 3^{(-3)-(-2)} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

(3) $(2^{-2})^3 = 2^{(-2)\times 3} = 2^{-6} = \dfrac{1}{64}$