

指数の拡張(1)

～ 0 や負の整数の指数 ～

講師
川崎 宜昭

学習のポイント

数学Ⅰでは、正の整数の範囲で指数について学びました。ここでは、指数の範囲を0や負の整数に広げる方法について学習します。

- ① 指数法則の復習
- ② 指数法則を用いた計算
- ③ 0や負の整数の指数とは？

1 指数法則の復習

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \boxed{?}$$

計算するのは大変ですが… 3^7 と書き表すことができます。

$$a \times a \times a = a^3 \quad (a \text{ の } 3 \text{ 乗})$$

$$a \times a \times a \times a \times a = a^5 \quad (a \text{ の } 5 \text{ 乗})$$

これらのように、 a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい、 a^n で表します。

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}} = a^n \quad \leftarrow n \text{ を } a \text{ の指数という (} n \text{ は } a \text{ をかけた回数!)}$$

指数法則をやさしく説明すると…

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{2+3}$$

$$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3 \times 2} = a^6$$

$$(ab)^3 = (ab) \times (ab) \times (ab) = a \times a \times a \times b \times b \times b = a^3 b^3$$

一般に、 m, n が正の整数のとき、次の指数法則が成り立ちます。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{m \times n}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

2 指数法則を用いた計算

例

$$(1) a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ a^3 \times a^5 &= (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a) \quad \leftarrow a \text{を何回かけたか?} \\ &= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \\ &= a^8 \\ &= a^{3+5} \end{aligned}$$

$$(2) (a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ (a^2)^3 &= a^2 \times a^2 \times a^2 \quad \leftarrow a^2 \text{を3回かけると、全部で} a \text{を何回かけたことになるか?} \\ &= a^{2 \times 3} \end{aligned}$$

$$(3) (a^2b)^4 = \{(a^2b)\}^4 = (a^2)^4b^4 = a^{2 \times 4}b^4 = a^8b^4$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ (a^2b)^4 &= \{(a^2b)\}^4 \quad \leftarrow a^2b \text{を4回かけると、} a \text{と} b \text{をそれぞれ何回かけたことになるか?} \\ &= (a^2)b \times (a^2)b \times (a^2)b \times (a^2)b \\ &= (a^2)(a^2)(a^2)(a^2)bbbb \\ &= (a^2)^4b^4 \\ &= a^8b^4 \end{aligned}$$

3 0や負の整数の指数とは？

10^4 は 10 を 4 回かけるので、 $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

10^3 は 10 を 3 回かけるので、 $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

10^2 は 10 を 2 回かけるので、 $10^2 = 10 \times 10 = 100$

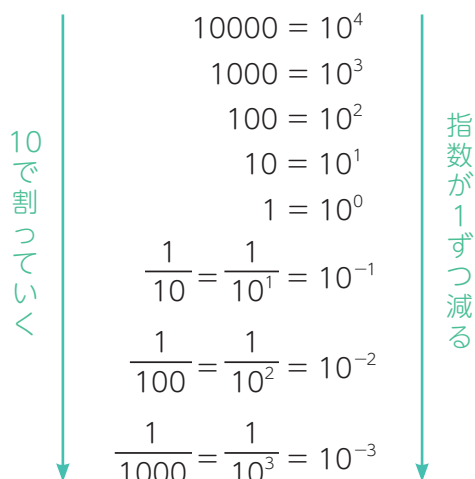
10^1 は 10 を 1 回かけるので、 $10^1 = 10$

10^0 は 10 を 0 回かけるので、 $10^0 = 0$ ❓

もし、 $10^0 = 0$ が正しいとすると・・・ $10^2 \times 10^0 = 100 \times 0 = 0$

となりますが、指数法則を使って計算すると・・・ $10^2 \times 10^0 = 10^{2+0} = 10^2 = 100$

となりますね・・・あれ???



0や負の整数の指数

$a \neq 0$ で、 n が正の整数のとき、 $a^0 = 1$ 、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

問1 次の計算をなさい。

- (1) $a^6 \times a^2$ (2) $(a^5)^4$ (3) $(a^3b)^5$

問2 次の□にあてはまる数を入れなさい。

- (1) $\frac{1}{3^2} = 3^\square$ (2) $1 = 3^\square$ (3) $\frac{1}{3^5} = 3^\square$

問1・解答

(1) $a^6 \times a^2 = a_{15}^8 = a_{5 \times 3}^8 = (a_3^5)^8$ (E) (2) $(a^5)^4 = a_{20}^8 = a_{4 \times 5}^8 = (a_5^4)^8$ (2) (3) $(a^3b)^5 = a_{15}^5 \times b^5 = a_{5 \times 3}^5 \times b^5 = (a_3^5)^5 \times b^5$ (1)

問2・解答

(1) $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$ (2) $1 = 3^0$ (3) $\frac{1}{3^5} = 3^{-5}$