第48回　第３章　三角関数「加法定理」

加法定理の応用 (2)
～ 三角関数の合成 ～

講師
水谷 信也

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のように，sin と cos の和の形を sin だけの式 $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に直すことについて学びます。

学習のポイント
① 三角関数の合成とは?
② 三角関数の合成の公式
③ 三角関数の合成の公式の使い方

1 三角関数の合成とは？

$$2\times\sin(\theta+30^\circ) = 2\sin\theta\cos30^\circ + 2\cos\theta\sin30^\circ$$
$$= 2\sin\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos\theta\times\frac{1}{2}$$
$$= \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$$

したがって，逆にたどれば，$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ は，$r\sin(\theta+\alpha)$ という形に変形できます。
この場合は，$r=2$，$\alpha=30^\circ$ となります。
$a\sin\theta + b\cos\theta$ という形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形にすることを，三角関数の合成といいます。

2 三角関数の合成の公式

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形にすることを考えてみましょう。
$r\sin(\theta+\alpha)$ に加法定理を用いると

$$r\sin(\theta+\alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha$$
$$= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$$

r と α は定数なので $r\cos\alpha$，$r\sin\alpha$ が各項の前になるように並べ替える

よって，$r\cos\alpha=\sqrt{3}$，$r\sin\alpha=1$ を満たす r と α を求めます。

● r の求め方

$(r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2 = r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より，$r^2=4$

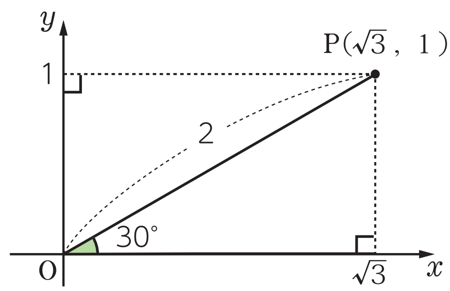
$r>0$ より，$r=2$

● α の求め方

$r=2$ を $r\cos\alpha=\sqrt{3}$，$r\sin\alpha=1$ に代入すると

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ となり，$\alpha=30^\circ$

以上のことから，$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = 2\sin(\theta+30^\circ)$



$a\sin\theta + b\cos\theta$ の場合は,

$r^2 = a^2 + b^2$ となって, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r\cos\alpha = a$, $r\sin\alpha = b$ より

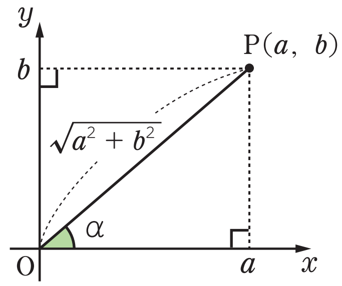
$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

ただし,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



3 三角関数の合成の公式の使い方

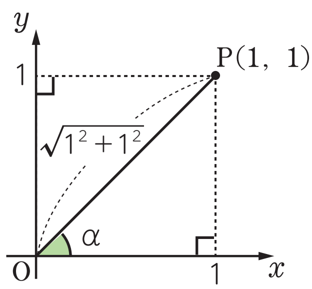
例　$\sin\theta + \cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい。

解答　$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{1^2+1^2}\,\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし, α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす角。

したがって, $\alpha = 45^\circ$ となるから

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$



問 1　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい。

解答　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\,\sin(\theta+\alpha) = 2\times\sin(\theta+\alpha)$

ただし, α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす角。

したがって, $\alpha = 60^\circ$ となるから

$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta + 60^\circ)$