第 47 回　　第３章　三角関数「加法定理」

加法定理の応用 (1)
～ ２倍角の公式 ～

講師
水谷 信也

加法定理の応用の一つで２倍角の公式について，その成り立ちと使い方について学びます。

学習のポイント
① ２倍角の公式とは?
② ２倍角の公式の特徴
③ ２倍角の公式を用いた三角関数の値の求め方

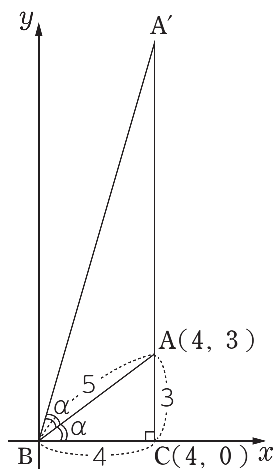
1 ２倍角の公式とは？

60° は 30° の２倍の大きさの角度ですが，30° の sin，cos の値や，60° の sin，cos の値は，今までの学習から値がわかるので，新しい公式の必要性は感じません。しかし，右図のように，第１象限にあり，∠C が直角となる△ABC で AB ＝ 5，BC ＝ 4，CA ＝ 3となる直角三角形を考えた場合はどうでしょうか。

∠B を α とすると $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ となります。

$\sin 2\alpha = \dfrac{A'C}{A'B}$ ，$\cos 2\alpha = \dfrac{BC}{A'B}$ の値については，

図からは求められませんが，計算によって求めることができます。



2 ２倍角の公式の特徴

サインの加法定理は，

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

この式において，$\beta = \alpha$ とおくと，

$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　＜サインの２倍角の公式＞

コサインの加法定理は，

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

同じように，$\beta = \alpha$ とおくと，

$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$　＜コサインの２倍角の公式＞

$\sin\alpha$ だけを使って表すと，$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ より

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$　＜ $\sin\alpha$ だけを使って表した式＞

$\cos\alpha$ だけを使って表すと，$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ より

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$　＜ $\cos\alpha$ だけを使って表した式＞

2倍角の公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$　＜ $\sin\alpha$だけを使って表した式＞

$= 2\cos^2\alpha - 1$　＜ $\cos\alpha$だけを使って表した式＞

3 ２倍角の公式を用いた三角関数の値の求め方

例　αが第１象限の角で，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$の値を求めなさい。

解答　$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

αは第１象限の角なので，$\cos\alpha > 0$ より

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

したがって

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$\cos\alpha$だけを使って表した式や，$\sin\alpha$と$\cos\alpha$の両方を使って表した式を用いた場合

$$\cos 2\alpha = 2 \times \cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$