第 45 回　第 3 章　三角関数「三角関数」

加法定理 (1)
～ 加法定理とは ～

講師
水谷 信也

α と β の sin と cos の値がわかっているときに、$\alpha+\beta$ の sin や cos の値を求める公式について学びます。

学習のポイント

① 加法定理の意味
② sin の加法定理
③ cos の加法定理

1 加法定理の意味

これまでに 45° とか 30° の三角関数の値を求めることは学びました。
このときに,「45° + 30°」すなわち 75° や,「45° − 30°」すなわち 15° の三角関数の値が求められれば便利ですね。
つまり，加法定理とは，α と β のそれぞれの角の三角関数の値がわかっているときに $\alpha+\beta$ や，$\alpha-\beta$ の角度の三角関数の値が求められる公式のことです。

2 sin の加法定理

sin75° を 45° と 30° の三角関数で表してみましょう。
右図のように,
単位円と x 軸との交点を A とします。
単位円の周上に点 B，C をそれぞれ∠AOB = 30°,
∠BOC = 45° となるようにとります。
C から x 軸と OB それぞれに垂線 CD，CE を引き,
E から x 軸と CD それぞれに垂線 EF，EG を引きます。
このとき，∠COD = 75° より

$\sin 75^\circ = \mathrm{CD} = \mathrm{CG} + \mathrm{GD}$

ここで，△ COE は直角二等辺三角形で,
∠EOC = 45°，∠DCO = 15° であるから,
∠GCE = 30° であることに着目して

$\mathrm{CG} = \mathrm{CE}\cos 30^\circ$ かつ $\mathrm{CE} = \sin 45^\circ$ より，$\mathrm{CG} = \sin 45^\circ \cos 30^\circ$

また,

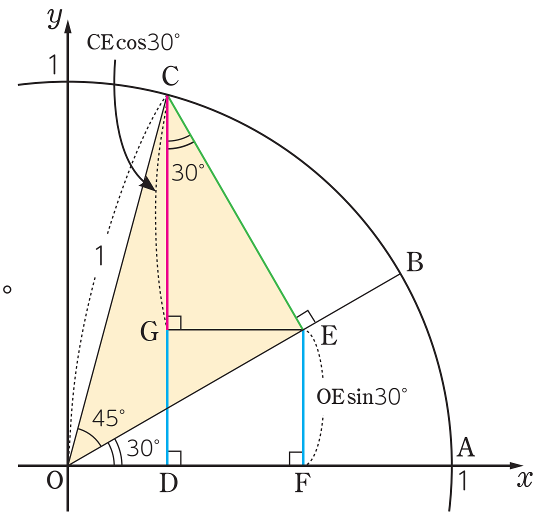
$\mathrm{GD} = \mathrm{EF} = \mathrm{OE}\sin 30^\circ$ かつ $\mathrm{OE} = \cos 45^\circ$ より，$\mathrm{GD} = \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

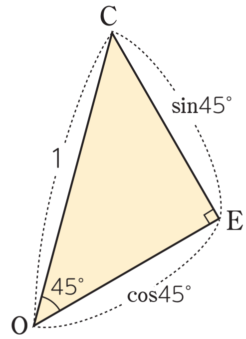
したがって,

$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

ここで，75° = 45° + 30° より

$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$





一般に，45° を α に，30° を β に置き換えて，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　（覚え方：咲いたコスモス，コスモス咲いた）

が成り立つ。

さらに，この加法定理の公式で β を $-\beta$ に置き換えると，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

ここで，$\cos(-\beta)=\cos\beta$，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ より，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

が成り立つ。

サインの加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3 cos の加法定理

△COD に着目すると，OC ＝ 1 より，

$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\mathrm{OD}=\mathrm{OF}-\mathrm{DF}$

$\mathrm{OF}=\mathrm{OE}\cos30^\circ=\cos45^\circ\cos30^\circ$

$\mathrm{DF}=\mathrm{GE}=\mathrm{CE}\sin30^\circ=\sin45^\circ\sin30^\circ$

したがって，

$\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ$

一般に，45° を α に，30° を β に置き換えて，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　（覚え方:コスモス，コスモス，咲いた，咲いた）が成り立つ。

※右辺の符号が逆転することに注意しましょう！

さらに，$\alpha+\beta$ を $\alpha+(-\beta)$ のたし算として考えると，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

が成り立つ。

コサインの加法定理

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$