第16回　第1章　方程式・式と証明「式と証明」

不等式の証明

講師
川﨑 宜昭

(実数)$^2 \geqq 0$ であることを利用し,
不等式 $A \geqq B$ が成り立つことを証明する方法
について学びましょう。

学習のポイント
① 不等式 $A \geqq B$ の証明方法
② 相加平均と相乗平均
③ 相加平均と相乗平均の関係を利用した不等式の証明

1 不等式 $A \geqq B$ の証明方法

$A \geqq B$ が成り立つことを証明するには, $A - B$ を計算して, $A-B \geqq 0$ となることを示せばよい。
数値で実験すると・・・
$3 \geqq 2 \iff 3-2=1 \geqq 0$
$-3 \geqq -5 \iff (-3)-(-5)=-3+5=2 \geqq 0$

不等式 $x^2+1 \geqq 2x$ が成り立つことを証明

(左辺)−(右辺)を計算すると
(左辺)−(右辺)$=(x^2+1)-2x$
$=x^2-2x+1$
$=(x-1)^2$
ここで,(実数)$^2 \geqq 0$ であるから $(x-1)^2 \geqq 0$
したがって,(左辺)−(右辺)$\geqq 0$ となるから,
$x^2+1 \geqq 2x$ が成り立つ。
※(左辺)−(右辺)$=(x-1)^2$ なので,(左辺)=(右辺)となるような x の値は $x=1$

問1 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。等号はどのようなときに成立しますか?
(1) $x^2+4 \geqq 4x$　　(2) $x^2+y^2 \geqq 2xy$

2 相加平均と相乗平均

2つの正の数 a，b に対して，

$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の相加平均，$\sqrt{ab}$ を a と b の相乗平均といいます。

4と9の相加平均は（　　　　），相乗平均は（　　　　）

9と16の相加平均は（　　　　），相乗平均は（　　　　）

15と15の相加平均は（　　　　），相乗平均は（　　　　）

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を証明してみましょう。

（左辺）－（右辺）を計算すると，

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}{2} \quad \leftarrow a=(\sqrt{a})^2,\ b=(\sqrt{b})^2$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad \leftarrow x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ より，$\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0$　← （実数）$^2 \geqq 0$

したがって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成立する。

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$　すなわち，$a=b$ のときである。

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}=0$$

相加平均と相乗平均

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

3 相加平均と相乗平均の関係を利用した不等式の証明

例　$a > 0$ のとき，不等式 $a + \dfrac{1}{a} \geqq 2$ が成り立つことを証明しなさい。

解答　まず，今までの考え方を使って解いてみましょう。

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = a + \frac{1}{a} - 2$$
$$= \frac{a^2 + 1 - 2a}{a}$$
$$= \frac{a^2 - 2a + 1}{a}$$
$$= \frac{(a-1)^2}{a} \geqq 0$$

$a > 0$ であり，$(a-1)^2 \geqq 0$ である。

等号が成立するのは $a = 1$ のときである。

しかし，相加平均と相乗平均の大小関係を使うと・・・

a を入れる

$● > 0$，$▲ > 0$ のとき，$\dfrac{● + ▲}{2} \geqq \sqrt{●▲}$　　等号成立は $● = ▲$

$\dfrac{1}{a}$ を入れる

$a > 0$，$\dfrac{1}{a} > 0$ であるから，

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{a \times \frac{1}{a}}$$
$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geqq 1$$
$$a + \frac{1}{a} \geqq 2$$

等号が成立するのは $a = \dfrac{1}{a}$ のときであるから，$a = 1$ のときである。

（$a^2 = 1$，$a > 0$ に注意！）

問2　$a > 0$ のとき，不等式 $a + \dfrac{4}{a} \geqq 4$ が成り立つことを証明しなさい。

問1・解答

(1)（左辺）−（右辺）$=(x^2+4)-4x$

$=x^2+4-4x$

$=x^2-4x+4$

$=(x-2)^2 \geqq 0$

したがって，（左辺）−（右辺）$\geqq 0$ となるから，$x^2+4 \geqq 4x$ が成り立つ。

等号が成立するのは，$x=2$ のときである。

(2)（左辺）−（右辺）$=(x^2+y^2)-2xy$

$=x^2+y^2-2xy$

$=x^2-2xy+y^2$

$=(x-y)^2 \geqq 0$

したがって，（左辺）−（右辺）$\geqq 0$ となるから，$x^2+y^2 \geqq 2xy$ が成り立つ。

等号が成立するのは，$x=y$ のときである。

相加平均と相乗平均・解答

4と9の相加平均は（　6.5　），相乗平均は（　6　）

9と16の相加平均は（　12.5　），相乗平均は（　5　）

15と15の相加平均は（　15　），相乗平均は（　15　）

問2・解答

$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right) \geqq \sqrt{a \times \frac{4}{a}}$$

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right) \geqq 2$$

$$a+\frac{4}{a} \geqq 4$$

等号が成立するのは，$a=\dfrac{4}{a}$ のときであるから，$a=2$ のときである。

（$a^2=4$，$a>0$ に注意！）