第12回　第1章　方程式・式と証明「高次方程式」

因数定理

講師
川﨑 宜昭

因数分解しにくい整式を因数分解するときに役に立つ定理を学びましょう。

学習のポイント
① 剰余の定理
② 因数定理
③ 因数定理を用いた因数分解

“あまり”のこと

1 剰余の定理

●$P(x)$ という記号

x についての整式を $P(x)$ や $Q(x)$ などの記号で表します。

整式 $P(x)$ の x に 2 を代入したときの値を $P(2)$ のように表します。

例　$P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ のとき

$P(-1) = (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 2 = 3$

●剰余の定理

$P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの商を $Q(x)$，あまりを R とすると，

$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$　←（わられる式）=（わる式）×（商）+（余り）

と表すことができる。

この式に $x = \alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R \\ &= 0 \times Q(\alpha) + R \\ &= R \end{aligned}$$

剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの余りは $P(\alpha)$ である

例　$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ を $x - 1$ でわったときのあまりは，

$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 3 = 2$

問1　$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 1$ を次の式でわったときのあまりを求めなさい。

（1）$x - 2$　　（2）$x + 1$

$x + 1 = x - (-1)$ と考えましょう。

2 因数定理

$P(x)$ を $x-\alpha$ でわったときの商を $Q(x)$，あまりを R とすると，

$P(x)=(x-\alpha)\,Q(x)+R$　あまりが0

この式で，$P(\alpha)=0$ のとき，$\boxed{R=0}$ であるから，$P(x)$ は $x-\alpha$ でわり切れる。

したがって，　$P(x)=(x-\alpha)\,Q(x)$　となり，$x-\alpha$ は $P(x)$ の因数となる。

> **因数定理**
>
> 整式 $P(x)$ において
>
> $P(\alpha)=0 \iff x-\alpha$ は $P(x)$ の因数である

$P(x)=x^3-2x^2+4x-8$ とする。

（1）$x-1$ は因数になっていますか？

$P(1)=1^3-2\times1^2+4\times1-8=-5\neq0$ であるから，$x-1$ は因数ではない。

（2）$x-2$ は因数になっていますか？

$P(2)=2^3-2\times2^2+4\times2-8=0$ であるから，$x-2$ は因数である。

3 因数定理を用いた因数分解

● x^3+2x^2-x-2 を因数分解しなさい。

$x^3+2x^2-x-2=(x-\alpha)(x^2+\square x+\triangle)$

このように因数分解されると考えれば，

左辺の定数は -2，右辺の定数は $-\alpha\times\triangle$ であるから，

$\triangle$は定数 2 の約数±1，±2 のどれかである。

解答

$P(x)=x^3+2x^2-x-2$ とおくと，

$P(\alpha)=\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-2=0$

αは，$P(x)$ の定数 2 の約数±1，±2 の中から見つける！

※ $P(1)=1^3+2\times1^2-1-2=0$

※よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

$P(x)$ を $x-1$ でわると，右のわり算より，

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$

さらに，x^2+3x+2 を因数分解して，

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$　・・・(答)

$$
\begin{array}{rr}
 & x^2+3x+2 \\ \hline
x-1\,\big) & x^3+2x^2-x-2 \\
 & x^3-x^2 \\ \hline
 & 3x^2-x \\
 & 3x^2-3x \\ \hline
 & 2x-2 \\
 & 2x-2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

問2　次の式を因数分解しなさい。

（1）x^3+4x^2+x-6　　（2）$x^3-x^2-17x-15$

（3）$x^3+3x^2-25x+21$　　（4）$x^3-4x^2-11x+30$

問1・解答

(1) $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 6 \times 2 + 1 = 5$

(2) $P(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) + 1 = -10$

問2・解答

(1) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

(2) $x^3 - x^2 - 17x - 15 = (x + 1)(x + 3)(x - 5)$

(3) $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = (x - 3)(x - 1)(x + 7)$

(4) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - 2)(x - 5)(x + 3)$