二項定理

講師
矢作 裕滋

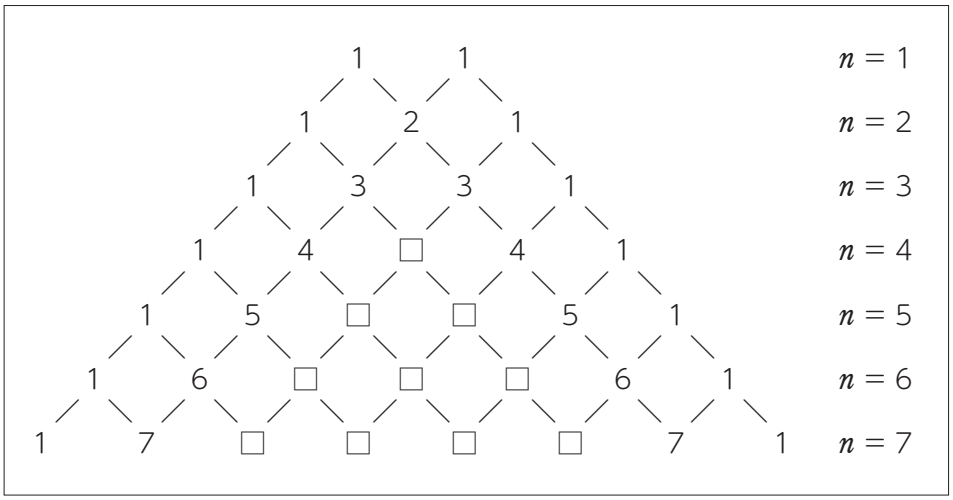
$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ の展開式については前回までに学びました。今回は，$(a+b)^n$ の展開式について考えます。

学習のポイント

① パスカルの三角形
② 記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ の意味
③ 二項定理

1 パスカルの三角形

$(a+b)^1 = a+b = 1a+1b$　　係数は　1，1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$　　係数は　1，2，1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　係数は 1，3，3，1
この先を予想してみてください！（下図の□に入る数字は？）



規則①
各段の両端の数はつねに１です。

規則②
各段の両端以外の数は、その左上の数と右上の数をたしたものになっています。

$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$
$\qquad = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$

これを計算すると

$$\begin{array}{rl} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \times) & a \quad + \quad b \\ \hline & a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ & \qquad a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$

となります。
では，パスカルの三角形を利用して展開してみましょう。
□に入る数字は？
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+\square a^3b^2+\square a^2b^3+5ab^4+b^5$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

2 記号 ${}_nC_r$ の意味

$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ と考えてみましょう。

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow aaaa$　　つまり，a^4 の係数は 1 です。

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow aaab$

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow aaba$

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow abaa$

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow baaa$

a^3b の係数は 4

すなわち，4 個の因数 $(a+b)$ のうち b をとり出す 1 個の因数 $(a+b)$ を選ぶ選び方の数だけ a^3b の項ができます。

${}_nC_r$	異なる n 個のものから r 個とった組み合わせ。

a^4 の係数　${}_4C_0$　← 4 個の因数から b をとり出す因数を 0 個選ぶ。
a^3b の係数　${}_4C_1$　← 4 個の因数から b をとり出す因数を 1 個選ぶ。
a^2b^2 の係数　${}_4C_2$　← 4 個の因数から b をとり出す因数を 2 個選ぶ。
ab^3 の係数　${}_4C_3$　← 4 個の因数から b をとり出す因数を 3 個選ぶ。
b^4 の係数　${}_4C_4$　← 4 個の因数から b をとり出す因数を 4 個選ぶ。
となるので，
$(a+b)^4$ の展開式は次のように表されます。

$$(a+b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+{}_4C_4b^4$$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

3 二項定理

${}_nC_r$ の値

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$${}_4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

$${}_4C_4 = 1$$

$${}_4C_1 = \frac{4}{1} = 4$$

$${}_4C_2 = \frac{\overbrace{4 \times 3}^{2\text{個}}}{\underbrace{2 \times 1}_{2\text{から}1\text{まで}}} = 6$$

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}, \quad {}_nC_0 = 1$$

$(a+b)^4$ の展開

$$(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$(a+b)^5$ の展開

$$(a+b)^5 = {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$+ {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。