第１回　入門講座

広がる数の世界の魅力

講師
矢作 裕滋

今まで中学校の数学や高等学校の数学Ⅰで学んだ数を復習し、数学Ⅱで学習する新たな数を紹介します。

学習のポイント
① 無理数
② 実数
③ 新たな数への拡張

1 無理数

数学の起源・・・古代文明の地には，大河があり，人々は農耕生活をしていました。

古代エジプトでは，毎年決まって起こるナイル河の氾濫のために境界がわからなくなってしまう畑を，また元のように区切るために測量術（幾何学）が発達しました。

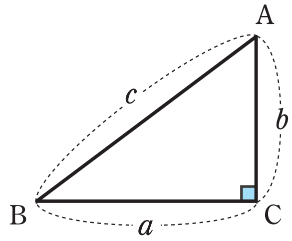
ピタゴラス

紀元前 500 年ぐらいに，古代ギリシャで活躍した数学者です。
エジプトに留学し，エジプトやバビロニアの数学を学びました。
その後，ギリシャに戻り，ピタゴラス学派，ピタゴラス教団を組織し，弟子を養成しました。

三平方の定理（ピタゴラスの定理）

直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a，b，
斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

$$a^2 + b^2 = c^2$$



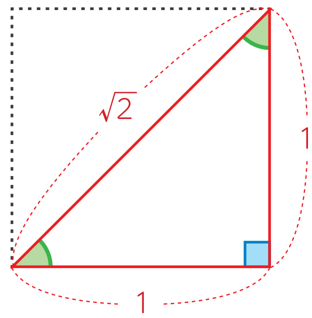
ピタゴラス数

３, ４, ５のように，直角三角形の３辺になることのできる正の整数，つまり，$a^2 + b^2 = c^2$ にあてはまる正の整数，自然数をピタゴラス数またはピタゴラスの数といいます。

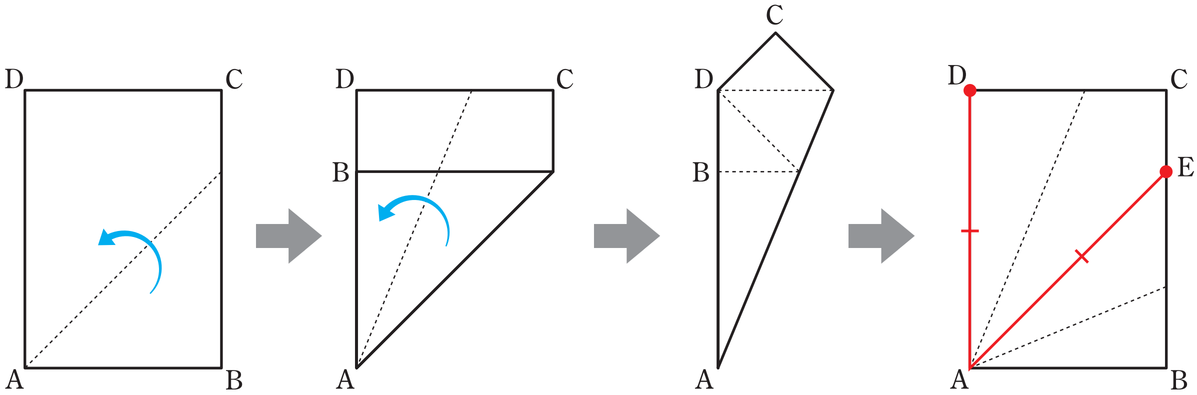
例）３, ４, ５について，$3^2 + 4^2 = 5^2$ が成り立つ。

ピタゴラス数は無数にあります。
例えば・・・
（３, ４, ５），（５, 12, 13），（８, 15, 17），（７, 24, 25），（○, 21, 29）などです。
では，（○, 21, 29）の○に入るピタゴラス数を求めてみましょう。
$b = 21$，$c = 29$ を $a^2 + b^2 = c^2$ に代入して，
$a^2 = 29^2 - 21^2 = (29 + 21)(29 - 21) = 50 \times 8 = 400$
よって，$a = 20$（$a > 0$ より）

右の図の斜辺の長さを表せるピタゴラス数，正の整数はありません。
そこで登場するのが無理数です。



身近な無理数



上の図で，①②の順に折り重ねると，AD と AE がぴったりと重なるので，
AB = 1 とすると，AD = $\sqrt{2}$
また，対角線 AC = $\sqrt{3}$ となります。

2 実数

有理数

整数 m と 0 でない整数 n を用いて，
分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表せる数

無理数

分数で表せない数

↓

有理数と無理数を合わせて，実数といいます。

実数
- 有理数：$-3.5,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots$
  - 整数：$\cdots,\ -2,\ -1,\ 0$
    - 自然数：$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$
- 無理数：$-\sqrt{5},\ \sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \pi,\ \cdots$

1 次方程式について

$ax+b=0$ の解は　$x=-\dfrac{b}{a}$　解は有理数

2 次方程式について

中学校で学習した 2 次方程式を思い出しておきましょう。

$x^2-4=0 \Longrightarrow x=\pm 2$　解は有理数

$x^2-2=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$　解は無理数

$x^2+2=0 \Longrightarrow$ 解はなし

有理数の範囲では解がありませんが，
平方根の学習をして新しい記号「$\sqrt{\ }$」
を使って解けるようになりましたね！

さて，この方程式も新しい記号をつくって解けるように
したら良いと思いませんか・・・？

3 新たな数への拡張

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

しかし，ルートの中の値が負だと解はありません。
そこで，2 次方程式が常に解を持つように新たな数を考えます。
それが 2 乗すると負になる「虚数」という数です。